Principes de mathématiques 12

SÉRIE DE PROBLÈMES

Septembre 2001

Student Assessment and Program Evaluation Branch

REMERCIEMENTS

Le Ministère de l'Éducation tient à remercier chaleureusement les professionnels suivants qui ont prodigué des conseils, qui ont prêté leur assistance et qui ont participé à l'élaboration de la *Série de problèmes* pour le cours Principes de mathématiques 12 :

Toni Botham	Killarney Secondary School	D.S. N^{o} 39 (Vancouver)
Dave Ellis	Eric Hamber Secondary School	D.S. N^{o} 339 (Vancouver)
Sue Haberger	Centennial Secondary School	D.S. N^{o} 343 (Coquitlam)
Linda Rajotte	Georges P. Vanier Secondary School	D.S. N^{o} 371 (Courtenay)

La *Série de problèmes* comporte huit problèmes. Ce nombre de problèmes devrait permettre à l'enseignant et aux élèves de consacrer suffisamment de temps à l'approfondissement de chaque problème, tout en offrant aux élèves une gamme d'expériences liées à la résolution de problèmes. L'utilisation efficace de ces problèmes en situation de collaboration exige beaucoup de temps. Les enseignants ont obtenu d'excellents résultats en présentant les problèmes à des intervalles réguliers et en permettant aux élèves d'explorer des idées et de consulter leurs pairs ainsi que d'autres personnes ressources avant de discuter en classe des solutions possibles.

La *Série de problèmes* fait partie de la composante **Résolution de problèmes** du cours Principes de mathématiques 12.

Série de problèmes
Septembre 2001

RAISON D'ÊTRE

La résolution de problèmes fait partie intégrante du programme d'études en mathématiques de la première à la douzième année. Dans le cours Principes de mathématiques 12, le résultat d'apprentissage prescrit énonce que l'élève puisse :

« utiliser différentes méthodes pour résoudre toutes formes de problèmes (c'est-à-dire des problèmes concrets, pratiques, techniques et théoriques) ».

La série de problèmes élaborée par le Student Assessment and Program Evaluation Branch du Ministère de l'Éducation correspond à l'intention de ce résultat d'apprentissage.

Puisque le Ministère fournit une série de questions, les élèves et les enseignants peuvent relever le défi de découvrir des stratégies appropriées qui peuvent être utilisées pour résoudre un problème nouveau ou peu courant.

LA NATURE DES PROBLÈMES

Ces problèmes ne devraient pas exiger un enseignement qui dépasse le cadre du cours Principes de mathématiques 12.

Les problèmes peuvent :

- nécessiter de nombreuses étapes;
- faire appel à de nombreux volets;
- faire appel à diverses stratégies de résolution de problèmes;
- favoriser diverses méthodes de résolution de problèmes;
- être puisés dans les nombreux thèmes présentés dans le programme d'études en mathématiques de la première à la douzième année;
- exiger l'utilisation de la technologie appropriée pour faciliter le processus de résolution de problèmes.

Les problèmes ont été conçus pour :

- être faits par tous les élèves inscrits au cours Principes de mathématiques 12, sous la direction d'un(e) enseignant(e);
- fournir aux élèves et aux enseignants des problèmes présentant divers degrés de difficulté;
- encourager les élèves et les enseignants à explorer des problèmes mathématiques et à découvrir les stratégies appropriées;
- créer une atmosphère propice à la collaboration qui incite les élèves et les enseignants à résoudre des problèmes mathématiques en mettant en commun leurs ressources individuelles;
- favoriser les discussions plus approfondies où les élèves et les enseignants peuvent se poser des questions telles « que se passerait-il si... », en modifiant les paramètres du problème initial.

ÉVALUATION

Comme elle fait partie intégrante du cours de mathématiques, l'habileté à résoudre des problèmes doit être incluse dans l'évaluation du cheminement de l'élève dans le cours Principes de mathématiques 12. En outre, les examens provinciaux comporteront chaque année une partie ou plusieurs parties de plusieurs problèmes de la *Série de problèmes*, ou des problèmes semblables ou identiques.

REMARQUES À L'INTENTION DE L'ENSEIGNANT

On s'attend à ce que les enseignants incorporent ces problèmes au programme de Principes de mathématiques 12. Certains de ces problèmes peuvent être présentés au début du cours, alors que d'autres seront proposés à des étapes judicieuses du programmes d'études. On encourage les enseignants à distribuer les séries de problèmes antérieures à des classes de mathématiques d'autres niveaux scolaires lorsqu'il y a lieu et à les utiliser comme une source additionnelle de problèmes pour le cours Principes de mathématiques 12.

En général, les élèves trouveront que les problèmes de cette série comportent de nombreux défis. Il est essentiel que les enseignants jouent le rôle de facilitateurs auprès des élèves lors de la résolution de tels problèmes. Le travail et la coopération en petits groupes doivent être favorisés. Le fait de se pencher sur ces problèmes peut également donner aux élèves un aperçu du dynamisme et de l'ingéniosité qui caractérisent la pensée créative. On expliquera aux élèves que ces problèmes ne doivent pas nécessairement être résolus en une seule séance. Il est parfois nécessaire de « jongler » avec un concept, de le mettre en veilleuse, puis de l'examiner à nouveau quelques jours plus tard. On doit encourager les élèves à mettre à l'essai des stratégies de résolution de problèmes auxquelles ils ont été exposés dans leur apprentissage des mathématiques. La composante Résolution de problèmes a pour but de fournir aux élèves des habiletés pour la vie quotidienne et des attitudes qui pourront être transférées à leurs emplois dans l'avenir. En tant qu'enseignants, nous souhaitons que nos élèves deviennent des êtres pensants, aptes à raisonner, plutôt que de simples manipulateurs de formules. Nos élèves doivent être en mesure d'établir des rapports entre des concepts difficiles et d'acquérir la confiance nécessaire pour analyser, explorer et formuler des hypothèses lorsqu'ils abordent des problèmes de toutes sortes.

Pour agir à titre de facilitateurs, les enseignants ne doivent pas avoir une approche prescripte, mais plutôt donner aux élèves une marge de manoeuvre qui leur permettra de résoudre les problèmes à leur façon. Cependant, il pourrait être utile **que les enseignants posent des questions qui peuvent favoriser la compréhension du problème**. Le but de ces questions n'est pas d'indiquer aux élèves une méthode particulière pour résoudre le problème, mais de leur fournir un indice dans certains cas ou de préciser le contexte dans lequel ils peuvent examiner ce qu'on leur demande. On doit encourager les élèves à déborder le cadre du problème afin de découvrir diverses techniques qui mènent à une solution.

On encourage les enseignants à se servir de diverses stratégies en classe pour évaluer la résolution de problèmes :

- Demander aux élèves de présenter des solutions en classe de façon individuelle, en tandem ou en petits groupes.
- Accorder des points pour les solutions écrites **complètes**. Les enseignants doivent mettre l'accent sur l'importance du style de présentation et accorder des points aux élèves qui proposent de nombreuses méthodes de résolution de problèmes, s'il y a lieu. On s'attend à ce que les présentations soient claires, complètes et bien développées. Le fait de demander aux élèves de soumettre un plan ou un aperçu des étapes menant à la solution et de perfectionner ce plan à mesure que le travail progresse favorisera la résolution du problème.
- Poser des questions d'examen ou donner des tests qui évaluent une partie du problème ou qui font appel à des processus cognitifs semblables.
- Demander aux élèves de tenir un journal décrivant leur cheminement en ce qui concerne la résolution du problème (incluant des idées et des essais non concluants).

Questions de la série de problèmes / Questions d’examen correspondantes

Question d’une série antérieure* :

a) L’équation d’une courbe est donnée dans la forme logarithmique suivante :

$$2 \log (x - 2) - 2 \log 4 = \log (3 - y) + \log (3 + y) - 2 \log 3$$

Écrivez une équation de cette courbe sous la forme standard sans utiliser de logarithmes. Tracez la courbe.

Question d’examen correspondante :

b) Le graphe de la fonction $\log(y+1) = \log(4-2x)$ doit observer quelle paire de restrictions?

A. $y > -1,\ x > 2$
* B. $y > -1,\ x < 2$
C. $y < -1,\ x > 2$
D. $y < -1,\ x < 2$

Question d’une série antérieure* :

a) Quelle est la somme des éléments de la 100e rangée?

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 + 3 \\ 4 + 5 + 6 \\ 7 + 8 + 9 + 10 \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Question d’examen correspondante :

b) Quel est le dernier élément de la 20e rangée dans la progression suivante?

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \quad 3 \\ 4 \quad 5 \quad 6 \\ \cdots\cdots \end{array}$$

A. 61
B. 199
* C. 210
D. 231

***N.B.** La composante Résolution de problèmes du cours Principes de mathématiques 12 sera évaluée de deux façons lors de l’examen provincial :

1. au moyen de questions qui testent une partie d’une solution plus longue d’un problème particulier de la **Série de problèmes – Septembre 2001** que l’élève étudiera pendant l’année;
2. au moyen de questions découlant de plus d’un domaine (problèmes multidisciplinaires).

PROBLÈME 1

Le taux de croissance continu comparé au taux de croissance annuel

Définition : le logarithme naturel de x, qui s'écrit $\ln x$, est défini comme la fonction inverse de e^x.

$$\ln x = \log_e x = c \quad \Rightarrow \quad x = e^c$$

Remarque : Lorsque vous faites des approximations à partir de la calculatrice, exprimez les réponses à 5 décimales près.

a) Utilisez votre calculatrice pour évaluer :

i) $\ln 1$ ii) $\ln e$ iii) $\ln 10$ iv) $\ln e^3$

b) Utilisez votre calculatrice pour évaluer :

i) e^0 ii) e^1 iii) e^{-1} iv) $e^{\ln 5}$

c) Utilisez les résultats des parties a) et b) pour obtenir une formule pour $\ln e^x$ et $e^{\ln x}$.

d) Résolvez l'équation suivante pour k en prenant le logarithme naturel des deux côtés.

$$1,035 = e^k$$

e) Une enquête récente a révélé que la population, P, de Victoria croît à un taux annuel de 1,1 %. Soit P_0 représentant la population le 1er janvier 2001 et soit t représentant le temps, en années, depuis cette date.

i) Exprimez P comme une fonction de t sous la forme $P = P_0 a^t$, où a est une constante appropriée.

ii) Puisqu'on peut considérer que la population croît de manière continue, exprimez la même fonction P comme une fonction exponentielle de t en base e, sous la forme $P = P_0 e^{kt}$, où k est une constante appropriée.

iii) k représente le taux de croissance continu. Comparez ce taux de croissance au taux de croissance annuel de 1,1 %. Quel est le taux le plus élevé et de combien est-il plus élevé? Dans quelle mesure cette différence est-elle significative? Par exemple, si $P_0 = 325\ 000$, déterminez la valeur de P dans 10 ans, à l'aide de chaque formule.

iv) La valeur de k trouvée dans la partie ii) est très proche du taux de croissance annuel de 1,1 %. Donc, on dit souvent que la fonction modèle $P = P_0 e^{rt}$ donne une bonne approximation pour une population qui augmente au taux de r % par année. Substituez les valeurs $r = 1,1\ \%$ et $P_0 = 325\ 000$ dans la formule pour déterminer la valeur de P dans 10 ans. Comparez cette réponse aux valeurs calculées dans les parties i) et ii). Dans quelle mesure la différence est-elle significative?

f) Si un compte bancaire rapporte des intérêts composés au taux de 6 % par année, calculés sur une base continue, déterminez le *taux de croissance annuel réel.*

Remarque : Le *taux de croissance annuel réel* est l'augmentation en pourcentage du montant initial après un an, en supposant que le montant a été composé annuellement.

PROBLÈME 2

Logarithmes et coniques

a) Soit la relation $\log(x - y) + \log(x + y) = \log 9$:

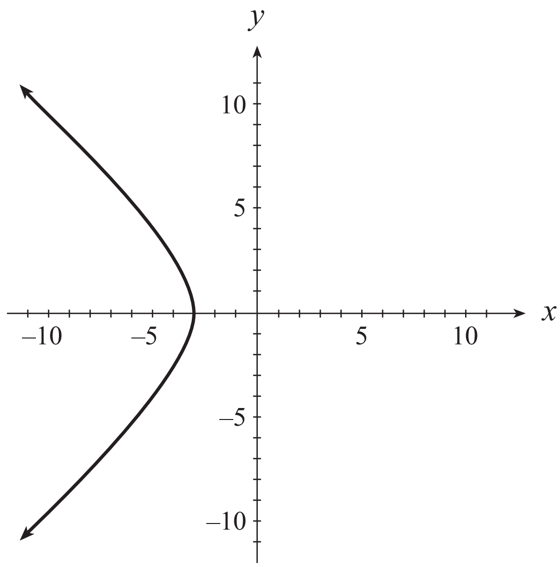
i) Exprimez la relation sans logarithmes.

ii) Énumérez les restrictions.

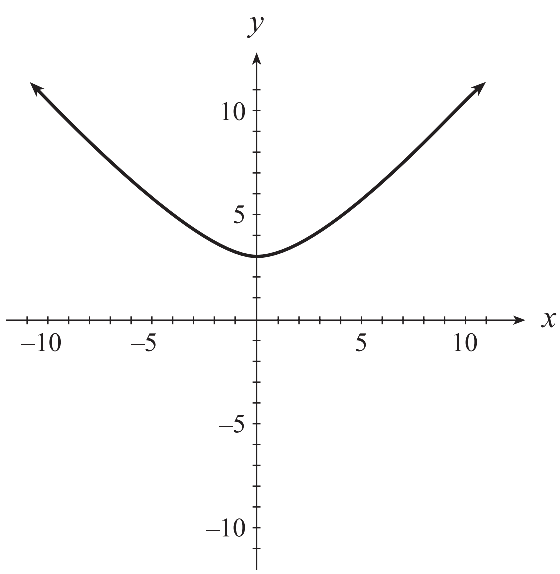
iii) Tracez le graphe de la relation.

b) À l'aide de logarithmes, déterminez une relation qui produirait chacun des graphes ci-dessous.

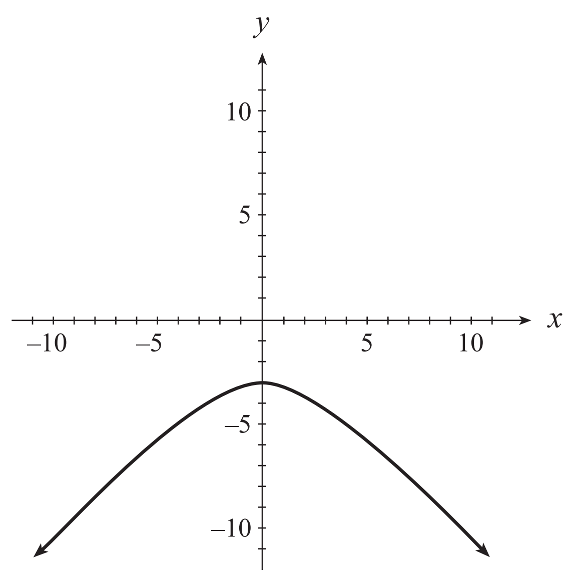
i)



ii)



iii)



PROBLÈME 3

Suites et séries

Dans une suite, si $t_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{x}\right)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{x}\right)^{k-1}$:

a) Déterminez une expression pour t_1, t_2, t_3, et t_4.

b) Déterminez une expression pour t_{10} et la valeur de t_{10} si $x = 2$. (Exprimez les réponses sous forme de fractions.)

c) Évaluez t_∞ si $x = 2$.

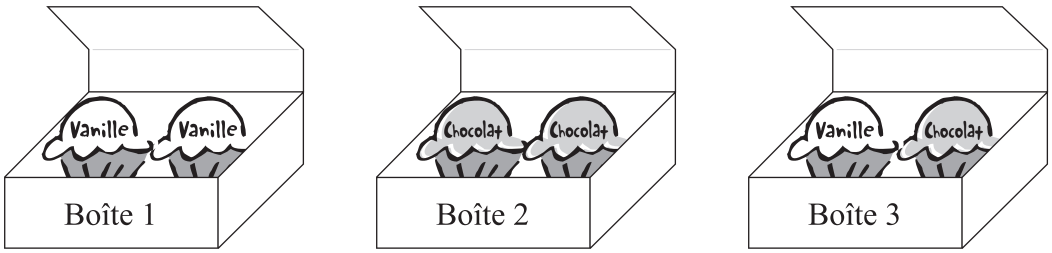
d) Si $t_\infty = \frac{9}{4}$, déterminez la valeur de x.

e) Si $t_\infty = p$, déterminez une expression pour x en fonction de p.

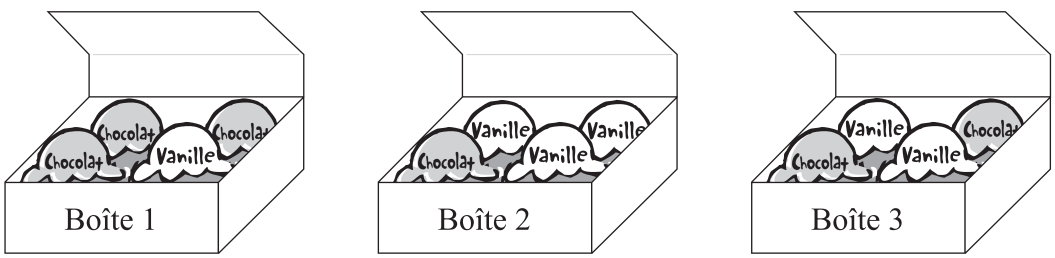
PROBLÈME 4

Probabilités

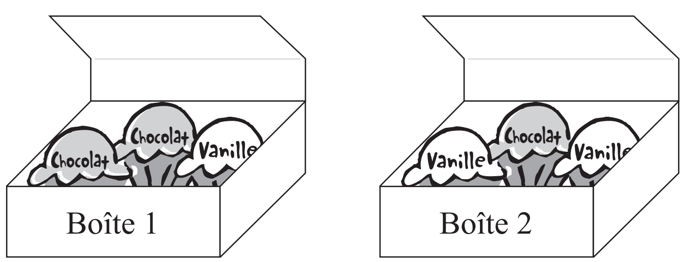
a) Une élève du cours de Mathématiques 12 arrive à une soirée de math organisée à l'école avec trois boîtes et expose la situation suivante : « Les trois boîtes que je transporte contiennent chacune 2 petits gâteaux—l'une des boîtes en contient 2 à la vanille, une autre boîte en contient 2 au chocolat et la dernière boîte en contient 1 de chaque saveur ». Elle choisit ensuite une boîte au hasard, l'ouvre et choisit un petit gâteau au hasard. Le premier petit gâteau qu'elle sort est au chocolat. Si elle sort l'autre petit gâteau de la **même** boîte, quelle est la probabilité qu'il soit au chocolat?



b) Un autre élève arrive avec trois boîtes et expose la situation suivante : « Les trois boîtes que je transporte contiennent chacune 4 petits gâteaux—une boîte en contient 3 au chocolat et 1 à la vanille, une autre boîte en contient 3 à la vanille et 1 au chocolat et la dernière boîte en contient 2 de chaque saveur. » Il choisit ensuite une boîte au hasard, l'ouvre et choisit un petit gâteau au hasard. Le premier petit gâteau qu'il sort est à la vanille. S'il sort un autre petit gâteau au hasard de la **même** boîte, quelle est la probabilité qu'il soit à la vanille?



c) Finalement, la prof de Mathématiques arrive avec 2 boîtes et expose cette autre situation : « Les deux boîtes que je transporte contiennent chacune 3 petits gâteaux—une boîte en contient 2 au chocolat et 1 à la vanille et l'autre boîte en contient 2 à la vanille et 1 au chocolat. » Elle choisit ensuite une boîte au hasard, l'ouvre et choisit un petit gâteau au hasard. Le premier petit gâteau qu'elle sort est au chocolat. Si elle sort un autre petit gâteau au hasard de la **même** boîte, quelle est la probabilité qu'il soit à la vanille?



Remarque : Dans toutes les problèmes ci-dessus, il y a une probabilité égale que chaque petit gâteau soit le premier petit gâteau sorti.

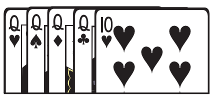
PROBLÈME 5

Mains de Poker / Analyse combinatoire

Plusieurs jeux de cartes sont basés sur les règles du Poker, un jeu dans lequel on distribue cinq cartes par joueur à partir d'un jeu standard de 52 cartes mélangées et dans lequel on attribue différentes valeurs à différentes mains ou combinaisons de cartes. La valeur d'une main particulière est associée au nombre de façons selon lesquelles une combinaison peut se produire. Par exemple, il n'y a que quatre façons d'obtenir une Quinte royale. Il s'agit de la main la plus forte; elle est composée d'un 10, d'un valet, d'une reine, d'un roi et d'un as d'une même sorte (c'est-à-dire, cinq trèfles, cinq carreaux, cinq coeurs ou cinq piques).

a) Combien y a-t-il de façons d'obtenir les trois autres combinaisons les plus fortes décrites ci-dessous?

Carré



Quatre cartes de même valeur et une autre carte.

Main pleine

Trois cartes de même valeur et deux cartes ayant toutes deux une valeur différente. (Un triplet ou trois cartes d'une sorte et une paire.)

Double paire

Deux paires de cartes ayant des valeurs différentes et une cinquième carte d'une autre valeur.

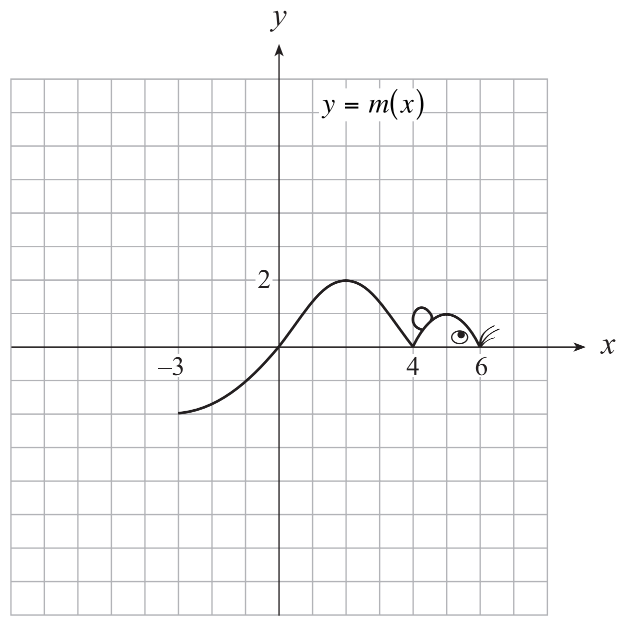
b) Supposez que vous jouez une partie dans laquelle on distribue seulement trois cartes. Combien y a-t-il de façons différentes d'obtenir une paire?

c) Supposez qu'on distribue quatre cartes. Combien y a-t-il de façons différentes d'obtenir une paire?

PROBLÈME 6

Transformations / La souris mathématique

Le graphe de la souris mathématique, $y = m(x)$ est illustré ci-dessous.



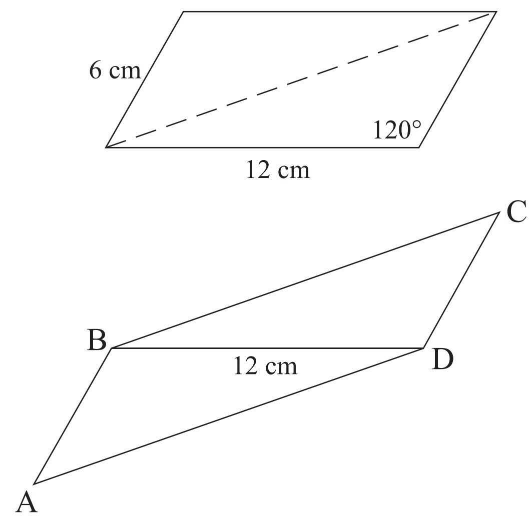
Sur le quadrillage fourni, tracez les graphes de :

1. $y = -m(2x)$
2. $y = 2m(2x + 2)$
3. $y = -2m(-x) + 2$
4. $y = -2m(2 - 2x) + 2$
5. $y = |m(x)|$
6. $y = m(|x|)$

PROBLÈME 7

Trigonométrie

Un parallélogramme a des côtés mesurant 6 cm et 12 cm et un angle de 120°, tel qu'illustré.
On le coupe sur sa longue diagonale pour former deux triangles. Les triangles sont placés de sorte que les côtés de 12 cm sont superposés, formant ainsi un nouveau parallélogramme ABCD, tel qu'illustré. Déterminez la longueur de la diagonale AC de ce parallélogramme.



PROBLÈME 8

Les intervalles de confiance

La compagnie Bullock et Brown a effectué un sondage auprès de 1 024 Canadiens choisis au hasard et a découvert que 20 % des répondants ont accès à Internet à la maison.

a) Déterminez l'erreur type pour ce sondage.

b) Utilisez les résultats de cet échantillon pour déterminer un intervalle de confiance de 95 % pour la population réelle de Canadiens ayant accès à Internet. Indiquez clairement la formule que vous avez utilisée.

c) Expliquez ce que signifie l'intervalle de confiance de 95 % trouvé à la partie b). Si la statistique était publiée dans un journal, comment serait-elle exprimée?

d) Quelle est la taille de l'échantillon requis pour réduire la marge d'erreur trouvée dans la partie b) pour le pourcentage de domiciles ayant accès à Internet à 1 % (toujours selon un intervalle de confiance de 95 %)?